images des maths
Les mathématiques en mots et en images

Tonalités musicales

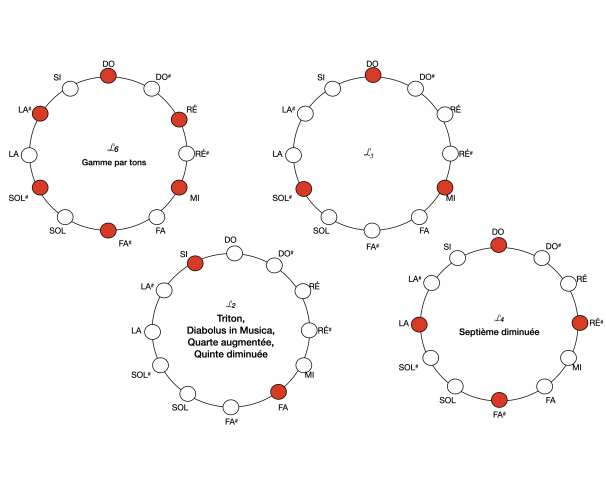
Écrit par **Michel Broué**

Publié le 7 décembre 2024

DOI : 10.60868/vsad-0c51 — CC BY-NC-ND 4.0

— ≥ 30 min

COMBINATOIRE THÉORIE DES GROUPES



L'objet de cet article est, en particulier, de montrer que le choix des 7 notes de la gamme classique

do-ré-mi-fa-sol-la-si

parmi les 12 notes du système tempéré

do-do♯-ré-ré♯-mi-fa-fa♯-sol-sol♯-la-la♯-si

est le seul choix possible qui satisfasse à des critères naturels liés à la transposition. L'approche utilisée, qui n'emploie que des considérations mathématiques élémentaires, fournit également des justifications purement mathématiques ou combinatoires à l'usage de la gamme mineure augmentée

la-si-do-ré-mi-fa-sol♯

ou d'autres gammes utilisées dans l'histoire – telle la gamme pentatonique javanaise – ou encore à l'importance d'autres gammes et accords classiques de l'harmonie musicale. Pour aller plus loin à propos de cet article, on pourra consulter [3].

Sommaire

La transposition et l'octave : bases physiologiques
Les douze notes du dodécaphonisme
Cadre tonal, type tonal
Les propriétés intéressantes des types usuels
Conclusion
Références
Compléments

La transposition et l'octave : bases physiologiques

Transposition

Appelons provisoirement *mélodie* une succession de fréquences $(F_1, F_2, F_3, \dots)$. Ainsi, la succession de fréquences (en nombres de battements par seconde ou Hertz)

$$M = (440, 440, 440, 494, 554, 494, 440, 553, 494, 494, 440)$$

est perçue comme le début de *Au clair de la lune*. C'est à peu près la suite de sons que produirait un piano sur lequel, à partir du « la du milieu », on taperait sur les touches (la, la, la, si, do dièse, si, la, do dièse, si, si, la) – *Au clair de la lune* en la majeur. Considérons maintenant la nouvelle mélodie définie par la suite de fréquences

$$M' = (622, 622, 622, 698, 783, 698, 622, 783, 698, 698, 622)$$

N'importe quel être humain y reconnaîtra « la même mélodie jouée à des hauteurs différentes », celle que produirait un piano sur lequel, au-dessus du « la du milieu », on taperait sur les touches (ré dièse, ré dièse, ré dièse, fa, sol, fa, ré dièse, sol, fa, fa, ré dièse) – *Au clair de la lune* en ré dièse majeur. Qu'y a-t-il de commun entre M et M' ? Il y a que les fréquences constituant M' s'obtiennent en multipliant celles constituant M par un facteur constant, puisque, à quelques décimales près, $M' = \sqrt{2} \times M$[1].

De manière générale, si l'on multiplie toutes les fréquences de M par un même nombre réel plus grand que 1, on reconnaît la mélodie *Au clair de la lune* « jouée plus haut » (plus aigüe), et si l'on multiplie toutes les fréquences de M par un même nombre réel positif plus petit que 1, on reconnaît la mélodie *Au clair de la lune* « jouée plus bas » (plus grave). Nous prenons ce fait physio-psychologique comme axiome.

Appelons *transposition* toute opération consistant à multiplier tous les éléments d'un ensemble de fréquences par un facteur constant positif.

Octave

Le cerveau de l'humain perçoit un son de fréquence donnée et le son de fréquence double comme « la même note » (l'une étant simplement déclarée plus aigüe que l'autre). Donc si deux fréquences ont un rapport égal à une puissance entière (positive ou négative) de 2, elles sont perçues comme produisant « la même note ». Doubler la fréquence d'un son s'appelle « remplacer le son par l'octave de ce son ». Le langage des mathématiques se prête immédiatement à la définition de la notion de note.

> **Définition 1.** La *note* associée à une fréquence F est l'ensemble de fréquences de la forme
>
> $$N = \{\dots 2^{-2}F, 2^{-1}F, F, 2F, 2^2F, 2^3F \dots\}$$

Un logarithme naturel ?

Les rapports entre fréquences sont perçus par les humains comme des *intervalles* entre les sons correspondants. C'est ainsi qu'un être humain (éduqué à la musique) entend à peu près « le même intervalle » entre le la et le do dièse qui le suit qu'entre ce do dièse et le fa qui le suit, alors qu'il entend un intervalle « double » entre le la et le fa. En effet, si on désigne par F_{la}, $F_{do♯}$, F_{fa} les fréquences respectives des notes citées, il est *faux* que $F_{fa} - F_{la} = 2(F_{do♯} - F_{la})$ et il est *faux* que $F_{fa} - F_{do♯} = F_{do♯} - F_{la}$. Par contre, il est *vrai* que

$$\frac{F_{fa}}{F_{la}} = \left(\frac{F_{do♯}}{F_{la}}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{F_{fa}}{F_{do♯}} = \frac{F_{do♯}}{F_{la}}$$

Ainsi, l'être humain formule que « des fréquences de mêmes rapports correspondent à des sons de mêmes intervalles ». De ce point de vue, le cerveau humain (ou l'oreille humaine ?) fonctionne comme un logarithme naturel : il transforme les produits en sommes et les divisions en différences.

Noter qu'un intervalle correspondant à un rapport de fréquence de 1,03 est en général perçu par une oreille humaine exercée, alors qu'un intervalle correspondant à un rapport de 1,01 est en général imperceptible.

Les douze notes du dodécaphonisme

Racine douzième de 2

Sur un piano (accordé), on n'a que douze notes. Ce sont les douze notes utilisées par (presque) toute la musique occidentale – et singulièrement par tous les instruments à clavier, les guitares, etc. :

la-la♯-si-do-do♯-ré-ré♯-mi-fa-fa♯-sol-sol♯

Elles sont déterminées par les conditions suivantes :

1. on fixe (par décret ou par accord international) la fréquence de l'une d'entre elles (en général, une fréquence de référence pour le la, qui est aujourd'hui de l'ordre de 442 Hertz) ;
2. deux fréquences successives ont toujours le même intervalle.

Rappelons qu'avoir « le même intervalle » signifie que les rapports sont tous les mêmes. Désignons par δ ce rapport. Comme la note qui suit le sol dièse est l'octave du la, de fréquence deux fois celle du la initial, il en résulte que

$$\delta^{12} = 2, \quad \text{soit } \delta = \sqrt[12]{2}$$

Notons que δ vaut environ 1,06.

Précisons quelques mots du vocabulaire classique de la musique.

> **Définition 2.**
>
> 1. Deux fréquences F et F' représentant des notes du dodécaphonisme ont pour rapport une puissance δ^n de δ, où $n \in \mathbf{Z}$. L'entier n est appelé l'*intervalle* entre F et F'[1].
> 2. Un intervalle de 1 est appelé un *demi-ton* et un intervalle de 2 est appelé un *ton*[2].
>
> [1] Exemple : l'intervalle entre un si et un fa quelconques est un multiple de 6.
> [2] Exemple : l'intervalle entre un do et le fa qui le suit est de 5 demi-tons.

Il est commode de représenter les douze notes du dodécaphonisme sur un cercle (figure 1). La multiplication par δ^n (où n est un nombre entier positif ou négatif) est alors représentée par un décalage de n crans dans le sens des aiguilles d'une montre (si $n = -3$, on tourne donc de 3 dans le sens inverse des aiguilles) : de manière générale, tourner de n crans revient à tourner de r crans, où r est le reste de la division de n par 12. On trouvera ce cercle – et d'autres points communs avec notre point de vue – dans [2]. Noter que l'on y représente en noir (resp. blanc) les touches noires (resp. blanches) du piano – et ceci met en évidence la répartition « dissymétrique » de ces couleurs.

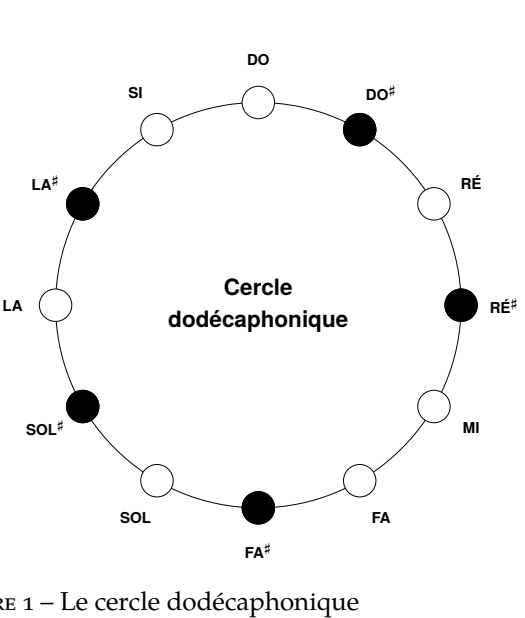


Figure 1 – Le cercle dodécaphonique

> **Définition 3.** On appelle *gamme de do majeur* l'ensemble des notes blanches du piano[1].
>
> [1] Énoncée dans l'ordre du cercle à partir de do, cela donne donc : do, ré, mi, fa, sol, la si.

Opération de G_{12}

Le groupe cyclique à 12 éléments G_{12}, consistant en l'ensemble des 12 nombres entiers 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 muni de l'addition modulo 12, opère sur le cercle dodécaphonique par rotation[2] : si N est une note du cercle dodécaphonique et si n est un élément du groupe G_{12}, on désigne par $N + n$ la note obtenue à partir de N par la rotation de n crans. Une mélodie rudimentaire peut être représentée par une suite de notes $(N_1, N_2, N_3, \dots)$ et *transposer* signifie seulement *faire tourner d'un facteur constant cette mélodie*, *i.e.* la remplacer par une mélodie du type $(N_1 + n, N_2 + n, N_3 + n, \dots)$. C'est pourquoi nous écrivons parfois « translation » pour transposition.

> **Définition 4.** Pour toute note N, on appelle *gamme de N majeur* l'ensemble des notes $\{N, N+2, N+4, N+5, N+7, N+9, N+11\}$.

Ainsi, ajouter 4 à toutes les notes blanches transpose la gamme de do majeur en celle de mi majeur (figure 2).

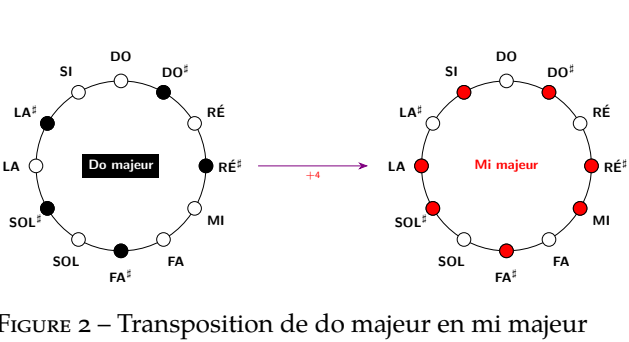


Figure 2 – Transposition de do majeur en mi majeur

Répéter une transposition donnée (*i.e.* ajouter n, $2n$, etc.) ne fournit pas toutes les transpositions possibles. L'ensemble des multiples de n dans G_{12} est G_{12} tout entier si et seulement si n est premier à 12, en d'autres termes, si et seulement si $n = \pm 1$ ou $n = \pm 5$ (noter que $-5 = 7$).

On note d comme « dièse » (resp. b comme « bémol ») la translation par 7 (resp. la translation par 5)[3]. L'application répétée de d et de b est résumée par l'ordre suivant sur le cercle dodécaphonique (figure 3) et cet ordre (fa, do, sol, ré, la, mi, si) est bien connu des musiciens.

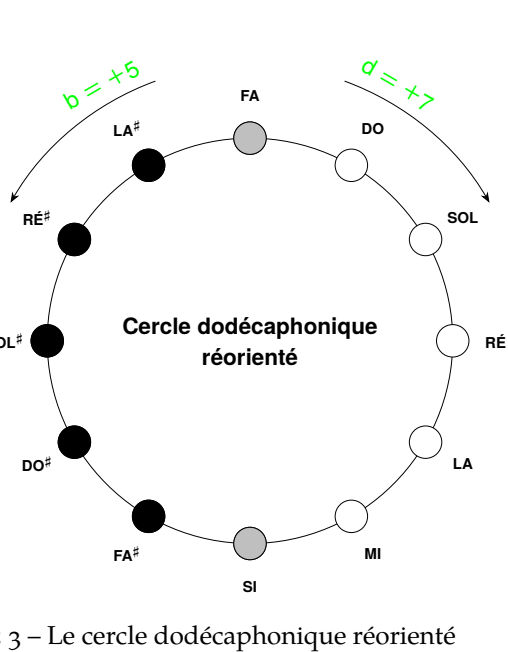


Figure 3 – Le cercle dodécaphonique réorienté

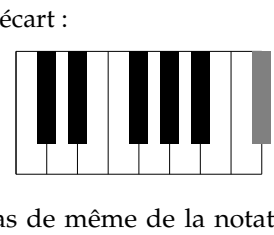
Cadre tonal, type tonal

Cadre et type tonals occidentaux

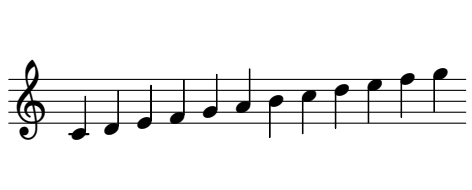
On remarque, sur le cercle dodécaphonique (figure 1) comme sur la notation musicale, que les notes de la gamme de do majeur, leur notation sur une portée et la construction du clavier du piano, comportent ce qui, à première vue, peut être vu comme des « bizarreries » :

— la suite des intervalles des notes de cette gamme, à partir de do, est (2,2,1,2,2,2,1) ;

— deux notes successives sur le clavier (qu'elles soient blanche-noire comme do et do♯, ou blanche-blanche comme mi et fa, ou noire-blanche comme fa♯ et sol) ont le même écart :



— il n'en est pas de même de la notation musicale (l'écart entre ré et mi est double de celui entre mi et fa) :



Désignons par $\mathcal{O} = \{\text{do, ré, mi, fa, sol, la, si}\}$ cet ensemble de sept notes, sous-ensemble de l'ensemble des douze notes du cercle dodécaphonique. D'après le principe de transposition, étant donné un élément n de G_{12}, tout ensemble de la forme $\mathcal{O} + n$ est « semblable » à $\mathcal{O}$.

> **Définition 5.**
>
> 1. On appelle *cadre tonal* tout sous-ensemble de l'ensemble des douze notes du cercle dodécaphonique ; $\mathcal{O}$ est le *cadre tonal occidental*.
> 2. On appelle *type tonal* l'ensemble des transposés d'un cadre tonal donné et *type tonal occidental* l'ensemble des transposés de $\mathcal{O}$.

Ainsi $\mathcal{O} + 6 = \{\text{fa}^\sharp, \text{sol}^\sharp, \text{la}^\sharp, \text{si}, \text{do}^\sharp, \text{ré}^\sharp, \text{fa}\}$ est un élément du type tonal occidental. Remarquons que $\mathcal{O} + 6$ s'obtient en multipliant toutes les fréquences constituant $\mathcal{O}$ par $\delta^6 = \sqrt{2}$.

Le type mineur augmenté

Au cours des siècles derniers, la musique occidentale a petit à petit intégré un autre type tonal, différent de ce que nous appelons le type occidental, et à présent d'usage très fréquent dans la musique populaire : le *type tonal mineur augmenté*, défini par le cadre tonal noté $\mathcal{A} = \{\text{la, si, do, ré, mi, fa, sol}^\sharp\}$. Pour tout entier n modulo 12, on dit que $\mathcal{O} + n$ et $\mathcal{A} + n$ sont *associés*.

Remarque 6 — $\mathcal{O}$ et $\mathcal{A}$ ont six notes en commun – ils ne diffèrent que par sol (qui appartient à $\mathcal{O}$ mais pas à $\mathcal{A}$) et par sol♯ (qui appartient à $\mathcal{A}$ mais pas à $\mathcal{O}$). Il en est de même de $\mathcal{O} + n$ et $\mathcal{A} + n$: il ont six notes en commun.

D'autres types sont aussi connus, comme par exemple celui qu'on nomme parfois « javanais », défini par le cadre tonal $\mathcal{J} = \{\text{do}^\sharp, \text{ré}^\sharp, \text{fa}^\sharp, \text{sol}^\sharp, \text{la}^\sharp\}$, qui contient 5 notes.

Types voisins

On dit que deux cadres de même cardinal $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont *voisins* s'ils ne diffèrent que par une seule note. Dans ce cas, pour tout entier n, les cadres $\mathcal{T} + n$ et $\mathcal{T}' + n$ sont voisins et on dit alors que les types définis par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont *voisins*.

Exemple 7 —

1. Si $\mathcal{T}$ est un cadre du type occidental, $(\mathcal{T}, d(\mathcal{T}))$ et $(\mathcal{T}, b(\mathcal{T}))$ sont voisins[1].
2. Les types occidental et mineur augmenté sont voisins, comme on le voit sur la figure 4 (do majeur et la mineur augmenté ne diffèrent que par la substitution de sol♯ à sol).

[1] Rappelons que d (comme « dièse ») est la translation par 7 et b (comme « bémol ») est la translation par -7 = 5.

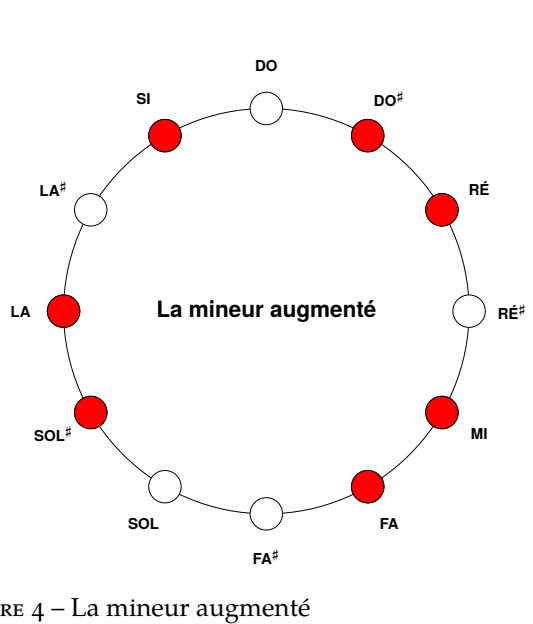


Figure 4 – La mineur augmenté

> — *Chaque œuvre de la musique occidentale est (en général) composée de plusieurs parties, chacune écrite avec les notes d'un cadre tonal déterminé, qui est soit de type occidental, soit de type mineur augmenté.*
>
> — *Deux parties contigües sont (en général) écrites dans des cadres tonals voisins (et ainsi le passage de l'une à l'autre se fait « en douceur »).*
>
> Premier principe de la musique occidentale traditionnelle

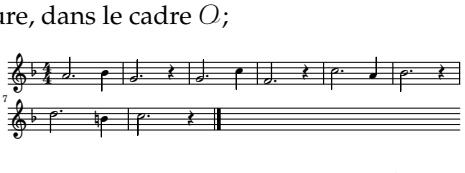
Les cadres voisins en question sont

— de la forme $(\mathcal{T}, d(\mathcal{T}))$ ou $(\mathcal{T}, b(\mathcal{T}))$, avec $\mathcal{T}$ de type occidental ;

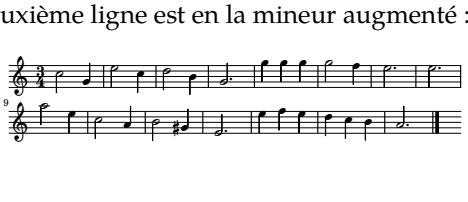
— ou de la forme $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$, avec $\mathcal{T}$ de type occidental, $\mathcal{U}$ de type mineur augmenté, et $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ sont associés.

Exemple 8 — C'est ainsi que :

1. la mélodie *Et mourir de plaisir* débute dans le cadre tonal de type occidental $\mathcal{O} + 5 = \{\text{fa, sol, la, si}^\flat, \text{do, ré, mi}\}$, puis passe, à la septième mesure, dans le cadre $\mathcal{O}$;



2. la première ligne de la mélodie suivante (*Le galérien*) est dans un cadre occidental (do majeur) alors que la deuxième ligne est en la mineur augmenté :



Une propriété essentielle des cadres évoqués ci-dessus est la suivante : chacun a exactement 12 transposés. Ce n'est pas le cas de tous les cadres, comme nous allons le voir.

Combien de transposés ?

Les types tonals des cadres qui ont moins de 12 transposés correspondent à ce qu'Olivier Messiaen appelait les *modes à transposition limitée*, qu'il avait aussi classifiés.

> **Théorème 9**
>
> *Il y a $4096 = 2^{12}$ cadres tonals et 352 types de cadres tonals. Plus précisément, il y a n cadres tonals ayant chacun m transposés qui définissent donc n/m types tonals :*

n cadres tonals	*m transposés différents*	*n/m types tonals*
4020	12	335
54	6	9
12	4	3
6	3	2
2	2	1
2	1	1

La démonstration du théorème ci-dessus figure dans [3].

Des constituants essentiels des types à transposition limitée sont donnés par quatre types tonals particuliers, que nous définissons maintenant.

Soit d un diviseur de 12. Posons $12 = dd'$. Soit N une note. On désigne par $\mathcal{L}_d(N)$ le cadre tonal à d notes défini à partir de N par la formule

$$\mathcal{L}_d(N) = \{N, N + d', N + 2d', \cdots N, +(d-1)d'\}$$

On dit qu'un cadre tonal est de type $\mathcal{L}_d$ (figure 5)s'il est de la forme $\mathcal{L}_d(N)$ pour une certaine note N.

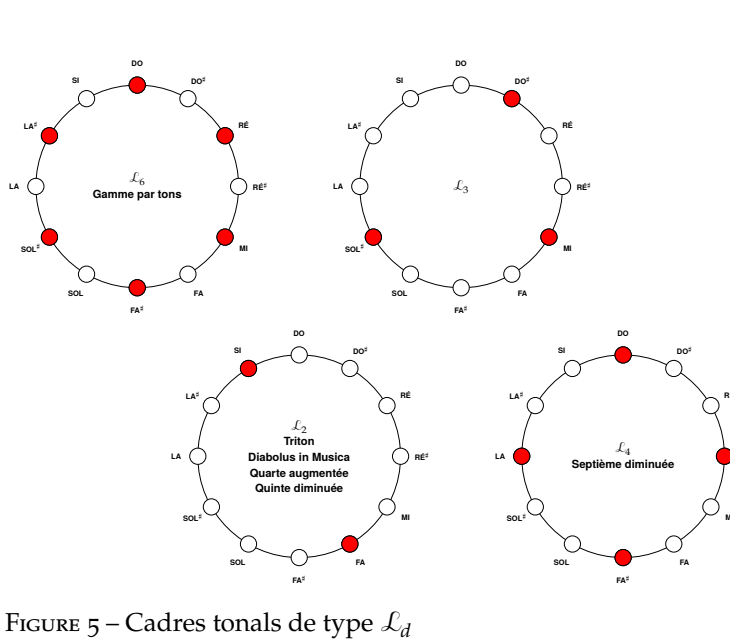


Figure 5 – Cadres tonals de type $\mathcal{L}_d$

> **Proposition 10**
>
> *Un cadre tonal $\mathcal{T}$ de type $\mathcal{L}_d$ est égal à $\mathcal{L}_d(N)$ pour n'importe laquelle des notes N qu'il contient et a exactement d' transposés, à savoir les cadres tonals*
>
> $$\mathcal{T}, \mathcal{T} + 1, \mathcal{T} + 2, \cdots, \mathcal{T} + (d' - 1)$$

Les propriétés intéressantes des types usuels

Propriété caractéristique du type occidental

> **Définition 11.** On dit qu'un type tonal $\mathcal{T}$ est *adapté à la transposition* si $\mathcal{T}$ et $d(\mathcal{T})$ sont voisins.

Remarque 12 — La condition ci-dessus équivaut à exiger que $\mathcal{T}$ et $b(\mathcal{T})$ soient voisins.

Nous allons énoncer un résultat qui montre en particulier que pour tout nombre entier $m \leqslant 12$, il existe un et un seul type tonal à m notes qui est adapté à la transposition :

— pour $m = 7$, il s'agit du type occidental classique ;

— pour $m = 5$, il s'agit du type javanais.

Nous énonçons le résultat dans un cadre général, permettant de remplacer les 12 notes du dodécaphonisme par un nombre arbitraire n de notes.

Soit n un nombre entier positif. Soit u un nombre entier inversible modulo n et soit v son opposé modulo n (on appliquera ce qui suit au cas $n = 12$, $u = 7$ et $v = 5$). Soit d la transposition correspondant à la rotation de u demi-tons et soit b la transposition correspondant à la rotation de v demi-tons : les opérations d et b sont inverses l'une de l'autre.

> **Théorème 13**
>
> *Soit m un nombre entier tel que $0 < m < n$. Il existe un unique type tonal tel que, pour tout cadre tonal $\mathcal{T}$ de ce type :*
>
> 1. *$\mathcal{T}$ a m éléments ;*
> 2. *$\mathcal{T}$ a n transposés différents ;*
> 3. *$\mathcal{T}$ est voisin de $d(\mathcal{T}) = \mathcal{T} + u$. En d'autres termes, $\mathcal{T} \cap d(\mathcal{T})$ a $(m-1)$ éléments.*
>
> — *Posons $\mathcal{T}(d;N) = (\mathcal{T} \cap d(\mathcal{T})) \cup \{N\}$. On a alors*
>
> $$\mathcal{T}(d;N) = \{N, d(N), d^2(N), \cdots, d^{m-1}(N)\}$$
>
> — *Posons $\mathcal{T}(b;N) = \{N, b(N), b^2(N), \cdots, b^{m-1}(N)\}$. On a alors*
>
> $$\mathcal{T}(d;N) = \mathcal{T}(b; d^{m-1}(N))$$
>
> *et les opérations d et b peuvent être représentées en glissant vers la droite ou vers la gauche :*
>
> — $d(\mathcal{T}(d;N)) = \{d(N), \cdots, d^{m-2}(N), d^{m-1}(N), d^m(N)\}$
>
> — $\mathcal{T}(d;N) = \{N, d(N), \cdots, d^{m-2}(N), d^{m-1}(N)\}$
>
> — $b(\mathcal{T}(d;N)) = \{b(N), N, d(N), \cdots, d^{m-2}(N)\}$

La dernière partie du théorème 13 montre que

1. pour construire le cadre tonal $\mathcal{T}(d;N)$, on choisit N sur le cercle dodécaphonique *réordonné* selon l'action de d et on choisit les $m - 1$ notes qui suivent N dans le sens des aiguilles d'une montre sur ce cercle ;
2. pour appliquer d au cadre tonal $\mathcal{T}(d;N)$, on le tourne d'un cran dans le sens des aiguilles d'une montre ; pour lui appliquer b, on le tourne d'un cran dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exemple 14 — Pour $n = 12$ et $m = 7$, on obtient le type tonal occidental. On a en effet $\mathcal{O} = \mathcal{T}(d, \text{fa}) = \mathcal{T}(b, \text{si})$. De plus :

— puisque d^7 est la rotation de $+1$ (car $7 \times 7 = 49 = 1$ modulo 12), on voit qu'on passe de $\mathcal{T}(d,N)$ à sa transformée par d en substituant $N + 1$ à N ;

— puisque b^7 est la rotation de -1 (car $7 \times 5 = 35 = -1$ modulo 12), on voit qu'on passe de $\mathcal{T}(d;N)$ à sa transformée par b en substituant $N' - 1$ à N'.

Remarque 15 — Pour $n = 12$ et $m = 5$, on obtient la base pentatonique javanaise.

Un simple coup d'œil sur le cercle dodécaphonique réordonné (ou un petit raisonnement que nous laissons au lecteur le soin de formuler) montre la propriété suivante, qui fournit une caractérisation complète (« existence et unicité ») du type tonal occidental.

> **Proposition 16**
>
> *Le type tonal occidental est le seul (parmi les 335 types tonals à 12 transposés) qui possède les trois propriétés suivantes :*
>
> 1. *il est adapté à la transposition ;*
> 2. *tout cadre tonal de ce type contient un cadre tonal de type $\mathcal{L}_2$;*
> 3. *un cadre tonal de ce type ne contient pas trois notes successives sur le cercle dodécaphonique.*

Le Diabolus in Musica

Le cadre tonal de type $\mathcal{L}_2 = \{N, N'\}$, formé de deux notes diamétralement opposées sur le cercle dodécaphonique ($N = N' + 6$ et $N' = N + 6$) a reçu beaucoup de noms dans la tradition musicale : on l'appelle quinte diminuée, quarte augmentée, ou encore triton, voire *Diabolus in Musica*. Outre la sonorité particulière qu'il fournit, il joue un rôle singulier dans l'harmonie liée au type tonal occidental.

Il s'agit là d'un phénomène que connaissent bien les musiciens amateurs : un accord de septième « appelle » l'accord majeur correspondant, tend à « se résoudre » en cet accord majeur. Analysons cela d'un peu plus près. Les deux successions d'accords suivants semblent naturelles à nos oreilles :

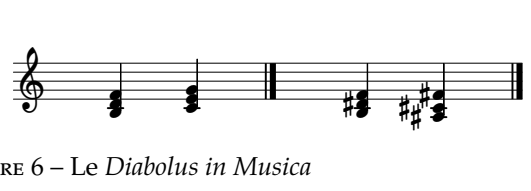


Figure 6 – Le *Diabolus in Musica*

On pourra consulter [1] pour découvrir comment l'enseignement classique de l'harmonie présente les paires d'accords ci-dessus (et en particulier la résolution de l'accord de septième), le premier semblant « attirer » le second.

Il y a aussi une explication mathématique à cette attirance. En effet, il est facile (par exemple sur le cercle dodécaphonique réordonné) de vérifier la propriété suivante.

> **Proposition 17**
>
> *Soit $\mathcal{M} = \{N, N'\}$ un cadre tonal de type $\mathcal{L}_2$. Il existe exactement deux cadres tonals occidentaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui contiennent $\mathcal{M}$ et on a*
>
> $$\mathcal{B} = \mathcal{B}' + 6 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B} + 6$$
>
> *De plus, toute note du cercle dodécaphonique est dans $\mathcal{B}$ ou dans $\mathcal{B}'$, et les seules notes qui sont à la fois dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$ sont celles de $\mathcal{M}$ – propriétés qui se traduisent par les égalités*
>
> $$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \mathcal{M}$$

L'énoncé précédent explique par exemple le « caractère naturel » des successions d'accords déjà citées

(si, ré, fa) → (do, mi, sol) et (si, ré♯, sol) → (la♯, do♯, fa♯)

En effet, une fois admis que l'on se situe dans le type tonal occidental, le triton (fa, si) n'apparaît que dans le ton de do et celui de fa♯ et, si on lui adjoint toute autre note, l'accord obtenu détermine lequel des tons précédents est concerné. En d'autres termes, un accord de trois notes contenant un triton est contenu dans un et un seul cadre tonal occidental, donc le détermine. Noter que, conformément à la proposition 17, Bartok a utilisé le triton comme « déterminant » de deux cadres diamétralement opposés.

Propriété du type mineur augmenté

Nous allons voir que modifier le cadre tonal occidental classique en substituant à la tonique la note située un demi-ton au-dessus (« contraire à toute logique et à tout respect de la loi naturelle », disent souvent les musiciens), a une possible explication mathématique, car cela présente un avantage considérable. C'est ce que montre la proposition suivante.

> **Proposition 18**
>
> 1. *Il existe un unique type tonal tel que, pour tout cadre tonal $\mathcal{S}$[1] de ce type,*
>   (a) *$\mathcal{S}$ a 6 éléments ;*
>   (b) *$\mathcal{S}$ est l'union d'un élément de type $\mathcal{L}_3$ et d'un élément de type $\mathcal{L}_4$.*
> 2. *Il existe exactement 6 types tonals tels que, pour tout cadre tonal $\mathcal{T}$ de l'un de ces types,*
>   (a) *$\mathcal{T}$ a 7 éléments ;*
>   (b) *$\mathcal{T}$ contient un cadre tonal équivalent à $\mathcal{S}$.*
>
> *Seuls les deux cadres tonals (si, do, ré, mi, fa, sol♯, la) et (si, do, ré, mi, fa, sol, sol♯}) sont voisins d'un cadre de type occidental.*
>
> [1] Par exemple $\mathcal{S}$ = (si, do, ré, mi, fa, sol♯).

La figure 7 montre le cadre $\mathcal{S}$ (qui possède un axe de symétrie sur le cercle dodécaphonique). On y a de plus indiqué par deux flèches chacune des deux notes qu'il convient de lui adjoindre pour obtenir l'un ou l'autre des deux cadres tonals à 7 notes décrits dans la proposition 18.

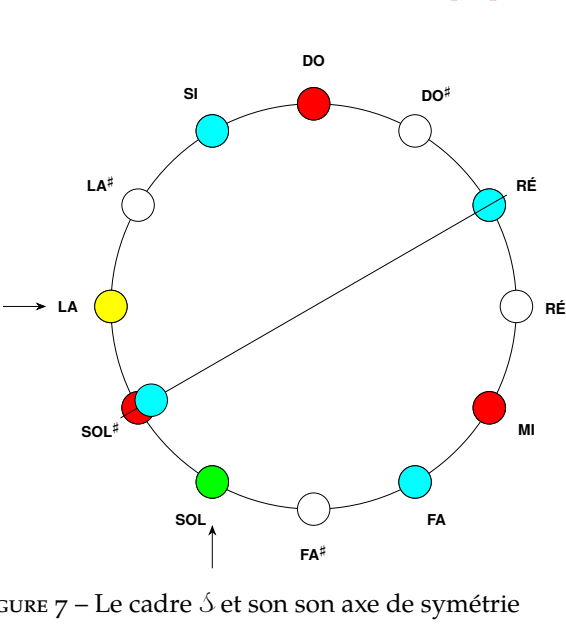


Figure 7 – Le cadre $\mathcal{S}$ et son son axe de symétrie

Remarque 19 —

1. Le type du dernier des cadres tonals cités dans la proposition 18 a parfois été utilisé en musique. De notre point de vue, il pourrait y jouer un rôle analogue à celui du type mineur augmenté.
2. L'ensemble {si, ré, fa, sol♯} (de type $\mathcal{L}_4$) est contenu dans quatre cadres mineurs augmentés : ceux correspondant aux gammes mineures augmentées de la, do, ré♯, fa♯. Cet ensemble a été souvent utilisé pour transposer d'un cadre mineur augmenté $\mathcal{A}$ vers l'un des trois autres $\mathcal{A} + 3$, $\mathcal{A} + 6$, $\mathcal{A} + 9$. La portée (figure 8) montre les quatre résolutions de l'accord de septième diminuée $\mathcal{L}_4$ en les accords mineurs augmentés qui le contiennent.

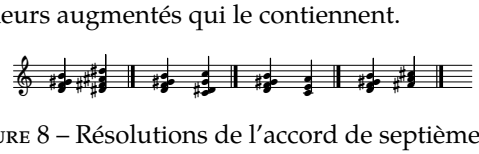


Figure 8 – Résolutions de l'accord de septième diminuée $\mathcal{L}_4$

Le fait qu'un accord de type $\mathcal{L}_4$ soit contenu dans quatre cadres tonals mineurs augmentés peut être utilisé en musique à d'autres fins que la transposition. Voici ce qui est écrit dans l'*Encyclopædia Universalis* au sujet de cet accord de septième diminuée.

> *« Dans les enchaînements auxquels il donne lieu, il peut déboucher à volonté sur des tonalités différentes. Et, pour la même raison, s'il est employé isolément, s'il est pris comme un absolu, il est chargé d'une équivoque, d'une espèce d'inconfort ou d'inquiétude qui le désigne tout naturellement pour tous les effets mystérieux, fantastiques. C'est pourquoi le théâtre lyrique en fournit de si nombreux exemples. C'est cet accord que l'on entend lorsque la statue du Commandeur s'encadre dans la porte de Don Juan. »*

Conclusion

On a compris les avantages que fournit ce que nous avons appelé le type tonal occidental : il est le seul, de tous les types tonals possibles, à être à la fois adapté à la transposition et « raisonnablement distribué » sur le cercle dodécaphonique.

Mettons en garde le lecteur trop prompt à s'enthousiasmer pour ce point de vue et tenté d'en déduire que les propriétés mathématiques du cadre tonal occidental « expliquent » son usage dans la musique. En effet, il semble que ce cadre tonal soit apparu bien avant l'idée et la pratique de la transposition... Peut-être, à l'inverse, l'usage de ce cadre a-t-il permis le développement des techniques de transposition ?

Revenons en conclusion sur cette adaptation à la transposition.

— Un cadre tonal occidental a 12 transposés – donc permet le plus grand nombre possible de transpositions.

— On peut passer d'un cadre tonal occidental à n'importe lequel de ses douze transposés par une succession de passages « en douceur » à des cadres occidentaux voisins (obtenus par rotation de 5 ou de 7 sur le cercle dodécaphonique).

— On peut également passer au cadre tonal mineur augmenté associé (qui en est aussi voisin) et ensuite utiliser les capacités de transposition du type mineur augmenté – singulièrement celles passant par un cadre de type $\mathcal{L}_4$: elles permettent de passer d'un cadre mineur augmenté $\mathcal{U}$ aux trois autres cadres $\mathcal{U} + 3k$ $(k = 1, 2, 3)$.

— On peut ensuite revenir au cadre occidental associé au dernier cadre mineur augmenté utilisé, etc.

Vers des généralisations ?

Références

[1] Henry Barraud. *Pour comprendre les musiques d'aujourd'hui*. Paris : Éditions du Seuil, 1990. ISBN : 2020115816.

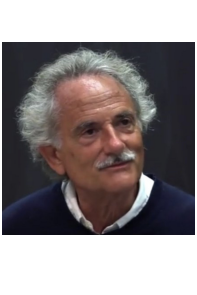
[2] Corentin Bayette. « Mathémusique : introduction au théorème de l'hexacorde ». *Images des mathématiques* (2019). URL : https://images.math.cnrs.fr/mathemusique-introduction-au-theoreme-de-lhexacorde/.

[3] Michel Broué. « Les tonalités musicales vues par un mathématicien ». *Revue de l'Institut universitaire de France* (2022), p. 37-78.

Remerciements

L'auteur et la rédaction d'Images des maths remercient les relecteurs Vincent Beck, Jérôme Germoni et Olivier Lamy pour leurs nombreuses remarques.

Article édité par Philippe Colliard.



Michel Broué
Professeur émérite – Université Paris Cité
https://webusers.imj-prg.fr/~michel.broue/

Compléments

> **Vers des généralisations ?**
>
> L'approche exposée dans le présent article suggère des généralisations évidentes (dont nous nous gardons de juger l'intérêt musical) : on peut ainsi décider de ne pas admettre la « naturalité » de la partition de l'octave en douze parties égales et convenir de partager l'octave en un nombre plus grand d'intervalles égaux – de sorte à augmenter la variété des mélodies et accords possibles.
>
> On peut par exemple partager l'octave en 18 intervalles égaux – j'ignore si cela a été expérimenté, par exemple en construisant un instrument où l'octave est ainsi divisé. Le groupe des rotations G_{18} (groupe des entiers modulo 18) opère sur le cercle des notes correspondant. Le choix de 18 présente plusieurs avantages :
>
> — 18 n'est pas trop grand (1/18e d'octave, soit un rapport de fréquences de $\sqrt[18]{2} \simeq 1{,}04$, est perceptible) ;
>
> — 18 « ressemble » à 12 : il a le même nombre de diviseurs (de même que $12 = 2^2 \times 3$, on a $18 = 3^2 \times 2$).
>
> Ainsi, on définit des types à transposition limités $\mathcal{L}_d$ pour $d = 1, 2, 3, 6, 9$ analogues à ceux définis dans le cas usuel. Cependant, parmi les éléments $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 16, 17\}$ du groupe G_{18}, les éléments suivants sont premiers avec 18 : 1, 5, 7, 11, 13, 17 (noter que $11 = -7$, $13 = -5$ et $17 = -1$). On voit donc qu'il y a ici *deux* paires de transpositions ((5,13) et (7,11)) jouant le rôle joué par la paire (5,7) dans le cas usuel. Notons
>
> — c la rotation de 5 et c' son inverse, la rotation de 13 ;
>
> — s la rotation de 7 et s' son inverse, la rotation de 11.
>
> La notion de « type tonal adapté à la transposition » se dédouble : il y a les types tonals « adaptés à c » (correspondant aux cadres tonals voisins de leur transposé de 5) et les types tonals « adaptés à s » (correspondant aux cadres tonals voisins de leur transposé de 7). Le théorème d'existence et d'unicité, et ses conséquences, s'appliquent à chacune des catégories précédentes de types tonals, mettant ainsi en évidence *deux* « types tonals occidentaux ».
>
> Énonçons un résultat précis pour les types adaptés à c.
>
> > **Théorème 20**
> >
> > *Il existe un cadre tonal $\mathcal{C}$, unique à transpositions près (donc définissant un unique type tonal), tel que*
> >
> > 1. *$\mathcal{C}$ est voisin de $c(\mathcal{C})$;*
> > 2. *$\mathcal{C}$ contient un triton (cadre de type $\mathcal{L}_2$ constitué de deux notes diamétralement opposées sur le cercle des 18 notes) ;*
> > 3. *$\mathcal{C}$ ne contient pas trois notes consécutives sur ce cercle.*
> >
> > *Un tel cadre $\mathcal{C}$ a alors 10 éléments et est déterminé à partir d'une note N par l'égalité $\mathcal{C} = \{N, c(N), c^2(N), cdots, c^9(N)\}$.*
> >
> > *Comme la suite des 9 premiers multiples de 5 dans G_{18} est (5, 10, 15, 2, 7, 12, 17, 4, 9), la suite des notes de $\mathcal{C}$, écrite à partir de N dans l'ordre des aiguilles d'une montre, est*
> >
> > $(N, N+2, N+4, N+5, N+7, N+9, N+10, N+12, N+15, N+1$
>
> **Remarque 21** — Pour le cas de types adaptés à s on obtient un cadre tonal $\mathcal{S}$ (unique à transposition près), possédant les propriétés analogues à celles énoncées dans le théorème 20 et dont la description dans l'ordre des aiguilles d'une montre est
>
> $(N, N+2, N+3, N+6, N+7, N+9, N+10, N+13, N+14, N+17)$
>
> Nous laissons au lecteur la curiosité de poursuivre l'investigation vers une partie des règles de cette « nouvelle harmonie ».

---

[1] Nous reviendrons sur le rôle particulier joué par $\sqrt{2}$.

[2] Le premier à avoir utilisé l'action du groupe G_{12} dans les questions d'harmonie musicale est sans doute Pierre Barbaud.

[3] Les musiciens noteront que le choix du nom de dièse (resp. bémol) vient du fait qu'ajouter un dièse à la clé fait tourner la tonique de 7 (resp. 5).