imagesdes**mathématiques**
Les mathématiques en mots et en images

Partage d'une courbe

Deux exemples en géométrie plane

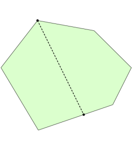
Écrit par **Aziz El Kacimi**

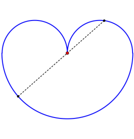
Publié le 19 février 2024

DOI : 10.60868/mtdp-3e50 — CC BY-NC-ND 4.0

— $\geqslant$ 30 min

COURBE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE





Partager une figure du plan en deux parties « égales » (en un sens à préciser suivant le contexte) est une question naturelle en géométrie euclidienne. Dans [1], nous nous sommes intéressés au partage par une droite d'un polygone en deux sous-polygones de même aire, et nous y avons indiqué comment procéder géométriquement à la règle et au compas dans le cas du triangle et du quadrilatère. Intéressons-nous aujourd'hui aux longueurs des courbes : comment partager une courbe fermée du plan en deux courbes de même longueur ?

Plan de l'article

L'objet de cet article est l'étude de deux problèmes de géométrie plane, à la fois élémentaires et pédagogiquement enrichissants.

1. Comment partager géométriquement le contour d'un polygone en deux courbes[1] de même longueur ?
2. Pour une courbe fermée simple, existe-t-il un point tel que toute droite passant par ce point la partage en deux courbes de même longueur ?

Le sujet nécessite des connaissances en géométrie euclidienne élémentaire que l'on pourra retrouver en fin d'article : le plan euclidien $\mathbf{E}^2$ et ses mouvements ainsi que la notion de courbe et celle de longueur.

Quelques rappels de géométrie différentielle euclidienne

Partage du contour d'un polygone

Soit $\wp$ un polygone à n sommets $A_1, \cdots, A_n$ (bien entendu $n \geqslant 3$). Les arêtes $A_nA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ seront notées respectivement $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Leur réunion $\mathfrak{a} = a_1 \cup \cdots \cup a_n$ est une ligne brisée fermée dont la longueur est le *périmètre* de $\wp$.

Problème 1

Construire géométriquement (à la règle et au compas) deux points L et M sur $\mathfrak{a}$ de telle sorte que les deux lignes brisées allant de L vers M d'un côté et de l'autre aient la même longueur.

Avec un peu de travail, le lecteur peut facilement se convaincre qu'on peut choisir L confondu avec A_n : ce sera le premier point du partage du périmètre. Ce n'est nullement une restriction.

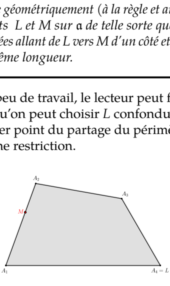


FIGURE 1

Résolution du problème

L'idée est vraiment toute simple comme nous allons le voir. C'est la construction effective qui demande un peu de travail ; mais elle est instructive et d'un intérêt pédagogique certain, deux raisons pour lesquelles cet exercice a été proposé dans le présent article. Il s'agit de déployer la ligne brisée $\mathfrak{a}$ sur une droite Δ en un segment dont on construira le milieu et qu'on renverra ensuite sur $\mathfrak{a}$. Cette droite Δ pourrait être par exemple (A_1A_n) et c'est ce qu'on choisira en fait. Voici comment ça va se passer d'un point de vue « mécanique ».

Au départ, le polygone $\wp$ est « assis » sur l'arête $a_1 = A_nA_1$. On le fait tourner autour du sommet A_1 de façon à l'asseoir sur l'arête a_2 reposant elle-même sur la doite Δ. Ensuite on le fait tourner autour du sommet A_2 de façon à l'asseoir sur l'arête a_3 reposant aussi sur la droite Δ. Et ainsi de suite... Précisons cela par des constructions géométriques rigoureuses.

Pour tout $j = 1, \cdots, n$, posons $\theta_j = \pi - \widehat{A_j}$ où $\widehat{A_j} = A_{j-1}\widehat{A_j}A_{j+1}$.

— La rotation r_1 de centre A_1 et d'angle θ_1 envoie le n-uplet $(A_1, \cdots, A_n)$ sur un n-uplet qu'on notera $(A_1^1, \cdots, A_n^1)$ avec, bien évidemment, $A_1^1 = A_1$ puisque A_1 est fixé par r_1. Les points $A_1^1, \cdots, A_n^1$ sont les sommets du polygone $\wp_1 = r_1(\wp)$.

— La rotation r_2 de centre A_2^1 et d'angle θ_2 envoie le n-uplet $(A_1^1, \cdots, A_n^1)$ sur un n-uplet qu'on notera $(A_1^2, \cdots, A_n^2)$ avec $A_2^2 = A_2^1$ puisque A_2^1 est fixé par r_2. Les points $A_1^2, \cdots, A_n^2$ sont les sommets du polygone $\wp_2 = r_1(\wp_1)$.

— De façon générale, la rotation r_j (avec $j = 1, \cdots, n-1$) de centre A_j^{j-1} et d'angle θ_j envoie le n-uplet $(A_1^{j-1}, \cdots, A_n^{j-1})$ sur un n-uplet qu'on notera $(A_1^j, \cdots, A_n^j)$ avec $A_j^j = A_j^{j-1}$ puisque A_j^{j-1} est fixé par r_j. Les points $(A_1^j, \cdots, A_n^j)$ sont les sommets du polygone $\wp_j = r_j(\wp_{j-1})$.

En fait, appliquer successivement les rotations $r_1, \cdots, r_{n-1}$ au polygone $\wp$, c'est lui faire faire une « roulade » au cours de laquelle il se transforme en la suite

$$\wp_1 = r_1(\wp), \wp_2 = r_1(\wp_1), \cdots, \wp_{n-1} = r_{n-1}(\wp_{n-2})$$

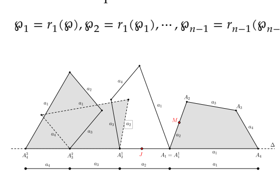


FIGURE 2

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, en regardant bien la figure 2 à titre d'exemple, que les images des arêtes $a_1, \cdots, a_n$ sont envoyées bout à bout sur la droite Δ. Le périmètre du polygone $\wp$ est ainsi déployé en le segment $[A_nA_n^{n-1}]$.

Pour finir, on construit le milieu J du segment $[A_nA_n^{n-1}]$. On replie celui-ci en lui appliquant les transformations inverses $(r_{n-1})^{-1}, \cdots, (r_1)^{-1}$ dans cet ordre. Au cours de l'opération, le point J est transformé en le point sur une arête du polygone qui répond à la question : c'est bien le point M cherché (unique puisque nous sommes partis du sommet A_1). Évidemment, la solution n'est pas unique : il en existe une infinité. Au lecteur de voir comment ça se passe !

Centre d'« équitabilité » d'une courbe fermée simple

Dans tout ce paragraphe, γ est une courbe fermée simple, c'est-à-dire sans auto-intersection. On ne perd aucune généralité en mettant cette dernière hypothèse, c'est juste par souci de simplification de l'exposé et pour la clarté des dessins qui l'accompagnent. La figure 3 donne un exemple d'une telle courbe, image d'une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbf{E}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

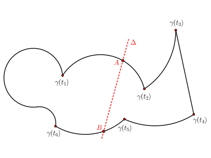


FIGURE 3

Partage d'une courbe

On s'intéresse au partage de la courbe γ par une droite Δ en deux courbes γ_1 et γ_2 connexes ayant la même longueur. Sur la figure 3, la droite rouge coupe γ en deux points A et B et donnant lieu à deux courbes connexes (en un seul tenant). Il est clair que lorsque la courbe admet un centre de symétrie O, toute droite passant par O répond à la question (voir figure 4).

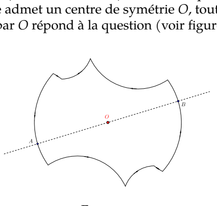


FIGURE 4

Mais lorsque la courbe n'a aucun centre de symétrie, peut-il exister un point O qui jouerait le même rôle ? Si oui, on dira que O est un *centre d'équitabilité* de la courbe. Il existe des courbes possédant cette propriété, c'est l'objet du problème qui suit.

Problème 2

Soit AB un segment de longueur 4r avec $r > 0$ et de milieu O. On trace les demi-cercles γ_0, γ_1 et γ_2 de diamètres respectifs AB, OA et OB (voir figure 5). On pose $\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$. Une droite Δ passant par O coupe le demi-cercle γ_0 en M et l'un des autres demi-cercles γ_1 ou γ_2 en N. Ainsi la courbe Γ est « partitionnée » en deux courbes : Γ_1, réunion de l'arc ON et l'arc OM (en bleu) et Γ_2, réunion de l'arc NB et l'arc BM (en rouge).

Montrer que les deux courbes Γ_1 et Γ_2 ont même longueur.

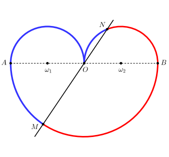


FIGURE 5

J'ai trouvé ce problème dans le livre *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques* de David WELLS [2] juste sous forme d'un dessin et deux ou trois lignes indiquant ce qu'il dit. J'ai pensé que ce serait utile d'en donner une solution, bien détaillée. Elle a un intérêt pédagogique certain autant pour le maître que pour les apprentis. On va voir ce que c'est !

Dans la preuve que nous donnerons, nous ferons usage de la proposition importante qui suit.

Proposition 3

Soient γ_1, γ_2 deux courbes isométriques du plan $\mathbf{E}^2$, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie f de $\mathbf{E}^2$ telle que $\gamma_2 = f(\gamma_1)$. Alors γ_1 et γ_2 ont même longueur.

Regard sur la figure

Cela consiste à bien examiner les différents éléments qui la composent, leurs natures respectives, ce qui les relie... Voici ce qu'on peut voir.

— Les deux demi-cercles γ_1 et γ_2 ont même rayon r et sont tangents au point O ; leur tangente commune est la droite Δ lorsque le point M est sur le milieu J de l'arc AB (demi-cercle γ_0) et donc N sur O.

— Le demi-cercle γ_0 est tangent à γ_1 et γ_2 respectivement en A et B et a pour rayon $2r$ (double de celui de γ_1 et γ_2).

Résolution du problème

Regardons les positions particulières de la droite Δ. Il y en a deux :

Cas 1 : $(\Delta) = (OJ)$. La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe Γ et donc la coupe en deux parties de même longueur $\ell(\Gamma_1) = \ell(\Gamma_2)$.

Cas 2 : $(\Delta) = (OA) = (OB) = (AB)$. C'est lorsque par exemple M est sur A et N sur B. Dans ce cas Γ_1 est la réunion des deux demi-cercles γ_1 et γ_2 et $\Gamma_2 = \gamma_0$. On a donc

$$\ell(\Gamma_1) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) = \pi r + \pi r = 2\pi r = \ell(\Gamma_2)$$

Dans le cas général, la droite Δ n'est ni (AB) ni (OJ). On va raisonner de façon un peu « mécanique ». On peut supposer, en raison de la symétrie par rapport à la droite (OJ), que M ne se déplace que sur le quart de cercle ouvert d'extrémités J et A (et donc N varie sur de demi-cercle γ_2).

— Quand M est sur J, Γ_1 est la réunion de l'arc JA et de γ_1 ; quand M se déplace de J vers A, la courbe Γ_1 perd l'arc MJ mais gagne l'arc NO. Il suffit donc pour conclure de montrer que ces derniers ont même longueur.

— On peut partir aussi de $\Gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ et $\Gamma_2 = \gamma_0$. Quand M se déplace de A vers J, Γ_1 perd l'arc BN et gagne l'arc AM. Il suffit donc de montrer que ces deux derniers ont même longueur. C'est ceci qu'on va effectivement prouver et cela va être presque immédiat.

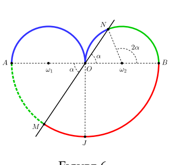


FIGURE 6

Les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{BON}$ étant opposés par le sommet O, ils ont même mesure α. D'autre part,l'angle inscrit $\widehat{BON}$ intercepte le même arc BN que l'angle au centre $\widehat{B\omega_2N}$. Donc $\widehat{B\omega_2N} = 2\widehat{BON} = 2\alpha$. Ceci nous donne

$$\ell(AM) = \alpha(2r) = (2\alpha)r = \ell(BN)$$

Conclusion : les courbes Γ_1 et Γ_2 ont même longueur, quelle que soit la position de la droite Δ passant par le point O.

Problème 4

Trouver d'autres courbes fermées simples ayant un centre d'équitabilité.

Références

[1] Aziz EL KACIMI, François RECHER et Valerio VASSALLO. « Partage d'un polygone ». *Images des mathématiques* (2014). URL : https://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html.

[2] David WELLS. *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*. Éditions Eyrolles, 1997.

Remerciements

Je remercie Philippe Colliard pour avoir lu avec soin cet article et suggéré des améliorations. Merci aussi à Samuel Sendera qui en a fait une relecture détaillée, très utile – qui a permis de pointer des coquilles – ainsi qu'à Clément Caubel qui a supervisé le processus de relecture.

Article édité par Philippe Colliard.

Aziz EL KACIMI
Professeur émérite – Université Polytechnique Hauts de France
http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/

Compléments

Quelques rappels de géométrie différentielle euclidienne

Le plan euclidien et ses mouvements

Application affine

Dans $\mathbf{E}^2 = \mathbf{R}^2$, vu à la fois comme *plan vectoriel* et comme *plan affine*, on note $O = (0,0)$ l'origine et $\vec{\imath} = (1,0)$ et $\vec{\jmath} = (0,1)$ les vecteurs de la base canonique. À tout point $M = (x,y)$ est associé l'unique vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$; cette correspondance est une bijection[1].

— Une application $\vec{f} : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbf{E}^2$ est *linéaire* si, pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbf{E}^2$ et tous réels λ et μ, on a $\vec{f}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{u}) + \mu\vec{f}(\vec{v})$.

— On dira qu'une application $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbf{E}^2$ est *affine* si, pour tout $M \in \mathbf{E}^2$, elle est de la forme $f(M) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$ où $\vec{f}$ est l'application linéaire définie par $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$, appelée *direction* de f.

Isométrie

On munit $\mathbf{E}^2$ de son produit scalaire $\langle(x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$ pour lequel la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormée. La *norme* associée est donnée par $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ et la *distance euclidienne* $d(M,M')$ entre deux points M et M' n'est rien d'autre que la norme $|\overrightarrow{MM'}|$ du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

— Une application $f : \mathbf{E}^2 \longrightarrow \mathbf{E}^2$ est une *isométrie* si, pour tous points M et M' de $\mathbf{E}^2$, on a $d(f(M), f(M')) = d(M,M')$.

On peut montrer qu'une telle application est forcément une bijection affine et que sa partie linéaire $\vec{f}$ préserve le produit scalaire, c'est-à-dire vérifie $\langle\vec{f}(\vec{u}), \vec{f}(\vec{v})\rangle = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Clairement, l'identité est une isométrie ; la composée de deux isométries est une isométrie, et l'inverse d'une isométrie est aussi une isométrie. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^2)$ des isométries de $\mathbf{E}^2$ muni de la loi de composition des applications est un groupe. Un élément du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^2)$ est aussi ce qu'on peut aussi dénommer *mouvement euclidien* : une *translation*, une *rotation*, une *symétrie axiale* ou une *symétrie glissée* (la composée d'une symétrie axiale et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de cette symétrie). Ce groupe est engendré par les symétries axiales. Sur la figure 7, sont dessinées les isométries possibles du plan euclidien $\mathbf{E}^2$.

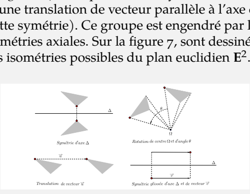


FIGURE 7

Une isométrie préserve les longueurs et les angles, donc la taille et la forme d'une figure géométrique. À défaut d'avoir les deux propriétés, on peut s'intéresser à des transformations qui ne gardent que la forme.

Homothétie

On dira que $f : M \longmapsto M'$ est une *homothétie* de *centre* Ω et de *rapport* $\lambda \in \mathbf{R}$ si, pour tout $M \in \mathbf{E}^2$, on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$.

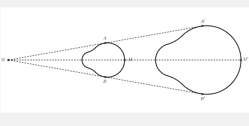


FIGURE 8

Bien évidemment, une homothétie n'est « intéressante » que lorsque son rapport est non nul. C'est la transformation qu'on applique à une photo quand on en fait un agrandissement ou un rapetissement. Les isométries et les homothéties engendrent un groupe de transformations de $\mathbf{E}^2$ qu'on appelle le groupe des *similitudes* du plan euclidien et qu'on note $\mathrm{Sim}(\mathbf{E}^2)$. De façon évidente, il contient $\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^2)$ comme sous-groupe.

Longueur d'une courbe

Courbe

Une *courbe* dans $\mathbf{E}^2$ est une application continue $\gamma : J \longrightarrow \mathbf{E}^2$ où J est un intervalle de $\mathbf{R}$. Cela signifie que, pour tout $t \in J$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues en t. L'image $\gamma(J)$ (qu'on notera encore γ) de J par l'application γ est son *support géométrique* et le couple (J, γ) en est une *représentation paramétrique*.

On dira que la courbe (J,γ) est *différentiable* si la fonction γ est dérivable. Cela veut dire que les deux fonctions réelles $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables. Leurs dérivées respectives $x'(t)$ et $y'(t)$ sont les composantes d'un vecteur noté $\gamma'(t)$ et appelé *vecteur vitesse* de γ en t. On dira que le point $\gamma(t)$ est *régulier* si $|\gamma'(t)| \neq 0$; un point en lequel $|\gamma'(t)| = 0$ est dit *stationnaire* ou *singulier*. On dira que γ est *régulière* si tous ses points sont réguliers. Dans ce cas, pour tout $t \in J$, la courbe γ admet une tangente qui est la droite affine Δ_t passant par le point $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t) = ((x'(t), y'(t))$ (voir figure 9).

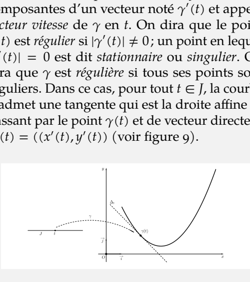


FIGURE 9

Si I est un autre intervalle et $h : I \longrightarrow J$ un difféomorphisme (une bijection dérivable et d'inverse dérivable), alors $(I, \gamma \circ h)$ est aussi une représentation paramétrique régulière de Γ ; on dira que (J,γ) et $(I, \gamma \circ h)$ sont *équivalentes*.

Longueur

Soient (J,γ) une courbe régulière. Pour calculer la longueur d'un arc commençant au point $M_0 = \gamma(t_0)$ et finissant en $M_1 = \gamma(t_1)$, on procède comme suit. On regarde l'arc $\gamma([t_0, t_1])$ comme le trajet d'un point M partant de M_0 à l'instant t_0 et arrivant à M_1 à l'instant $t_1 \in J$, avec à chaque instant la vitesse $|\gamma'(t)|$ (dépendant donc de t). Infinitésimalement, la distance parcourue à l'instant t est $|\gamma'(t)|\mathrm{d}t$, produit de la vitesse et de l'élément de temps $\mathrm{d}t$. La *longueur algébrique* parcourue par M dans son déplacement de M_0 à M_1 est donc la « somme » de tous ces infiniment petits, c'est-à-dire l'intégrale

$$\ell(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(s)|\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}\mathrm{d}s$$

Ce nombre réel est indépendant de la paramétrisation. La *longueur géométrique* (ou *longueur* tout court) de l'arc $\gamma(t_0, t_1)$ est le nombre positif $|\ell(t_0, t_1)|$.

Courbe régulière par morceaux

On dit qu'une courbe $\gamma : J \longrightarrow \mathbf{E}^2$ est *régulière par morceaux* s'il existe une partie finie $\Sigma = \{t_1, \cdots, t_n\}$ de J telle que γ est régulière sur $J \backslash \Sigma$ et, pour tout $i = 1, \cdots, n$, chacune des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point t_i. La longueur d'un arc de γ se définit de la même manière que pour une courbe régulière : les points singuliers ne posent aucun problème ni pour la définition de l'intégrale ni pour son existence.

Courbe fermée

L'intervalle J sera de la forme $[a,b]$ avec $a < b$. Dire qu'une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{E}^2$ est régulière signifie qu'elle est régulière sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et que γ admet une dérivée à droite $\gamma'_d(a)$ et une dérivée à gauche $\gamma'_g(b)$. On dit que γ est *fermée* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et *fermée régulière* si elle est fermée et vérifie de plus $\gamma'_d(a) = \gamma'_g(b)$.

Calcul effectif

De façon générale, le calcul effectif de la longueur d'une courbe peut s'avérer assez délicat. Nous nous limiterons aux courbes simples : un segment, un arc de cercle, c'est-à-dire celles qui nous intéressent ici. Pour un segment, il n'y a pas grand chose à dire, tout le monde sait ce qu'est sa longueur.

Pour un arc de cercle, il faut se souvenir que la longueur (totale) du cercle vaut $2\pi R$ (où R est le rayon) et donc celle de l'arc est θR avec $\theta \in [0, 2\pi]$ qui est la mesure de l'angle au centre qu'il intercepte. Vérifions cela à l'aide de la formule intégrale ci-dessus.

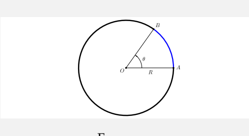


FIGURE 10

Le cercle admet comme paramétrisation régulière $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow (x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t)$. D'où la longueur $\ell(\theta)$ de l'arc $\gamma([0,\theta])$:

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \int_0^\theta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^\theta \sqrt{(-R\sin t)^2 +} \\ &= \int_0^\theta R\mathrm{d}t = \theta R \end{aligned}$$

1. Même si c'est évident, répétons-le : les composantes x et y du couple (x,y) représentent les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et celles du point M dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Crédits

Toutes les figures de l'article ont été réalisées par l'auteur.

1. Rappelons que les segments de droite font partie des courbes : ce sont des courbes... à courbure nulle !