Retour sur la conjecture de Syracuse

Ecrit par **Shalom Eliahou**
Publié le 1 janvier 2014

DOI : **10.4000/ababd.1721** — ici **doi:mai-ami-gr**

f / / ✉ vers mon ipad

ARITHMÉTIQUE

En cheminant plus vite dans les trajectoires du problème 3x + 1, un phénomène inattendu émerge.

Plan de l'article

La conjecture de Syracuse
Une conjecture plus forte que celle de Syracuse
Du déterministe à l'aléatoire
Une grosse surprise
Références

La conjecture de Syracuse

On revient ici sur la conjecture de Syracuse, aussi appelée conjecture de Collatz, du Hasse, de Kakutani, problème 3x + 1, etc. C'est la conjecture la plus élémentaire des mathématiques, compréhensible dès l'âge de 6 ans mais *ce jour non résolue depuis plus de six ans*. Son objet central est une fonction toute simple opérant sur les nombres entiers naturels : appliquée à l'entier n, elle produit $f(n)$ si n est pair, $3n + 1$ si n est impair.

Une fonction toute simple et ses trajectoires

Appelons f cette fonction. On note $T(n)$ le résultat produit en appliquant f à n. Par exemple, appliquée à $n = 6$, elle produit $T(6) = 3$, et appliquée à $n = 3$, elle produit $T(3) = 3$. Itérons simplement $n \mapsto T(n)$ pour obtenir les trajectoires successives $T(n), T(T(n)), T(T(T(n))), \ldots$ Si $n = 6$, on a $6 \mapsto 3 \mapsto 3 \ldots$ Sans oublier $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto \text{etc.}$ Ce point aussi mérite d'être cité deux dernières cas en itérant $n \to 3n + 1$. On lira, pourquoi d'entrer ou et bien chemin ? En *pourrait* l'application répétée de f à partir de n, voici la suite obtenue :

$$6 \mapsto 3 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto \ldots$$

On atteint 1 à la 6e étape. Ce si seule la trajectoire devient cyclique, alternant simplement entre 4 et 2. La suite obtenue à partir de n est appelée trajectoire T de n *toujours* répétée à partir de n : $n \mapsto T(n) \mapsto T(T(n)) \mapsto \ldots$ Pour plus de précisions si nécessaire. Prenons une autre trajectoire, par exemple, celle de $n = 9$. On obtient la suite

$$9 \mapsto 3 \mapsto 3 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto \ldots$$

La encore, la trajectoire finit par atteindre 1, en l'occurrence au bout de 19 étapes. Amusant vous à calculer d'autres trajectoires. Pas d'échappatoire, vous finirez par atteindre 1 pour ne pas tomber ici ou sur ici. Ici est la conjecture de la conjecture de Syracuse.

Conjecture « (de Syracuse). La trajectoire suivi T de tout entier naturel n atteint 1.

Une conjecture plus forte que celle de Syracuse

Lorsqu'on dit *arrêt* et *s'exposer une nouvelle conjecture*, datant de 2012, intimement liée à celle de Syracuse mais encore plus forte, dans le sens où elle implique celle de Syracuse. Elle a été obtenue entièrement automatiquement une solution de celle de Syracuse. Les auteurs de cette conjecture sont Jean Fromentin, Bénédicte Simonetto et cette seule signature : **Conjecture** (de Fromentin-Simonetto). Les trajectoires de f ne sont jamais cyclique.

Itération

Appliquer de façon répétée une fonction — *autrement dit l'itérer* — est fréquent en mathématiques. Le mystère, c'est que même pour une fonction très simple, le fait de l'itérer peut conduire à des comportements complexes, difficiles à prédire, voire chaotiques. Voici un cas de la fonction f, objet de cet article, voici pour mettre en appétit un tout autre exemple de *cette* phénomène.

Considérons la fonction $f(x) = (x + \frac{2}{x})/2$ pour $x > 0$. Itérons ses nombres rationnels $r = a/b$ positifs. La trajectoire de $r = 1$ sous f commence ainsi :

$$1 \mapsto 3/2 \mapsto 7/3 \mapsto 17/12 \mapsto 41/24 \mapsto \ldots$$

En écrivant arrondie à g décimales, cela s'écrit

$$1 \mapsto 1{,}5 \mapsto 1{,}4 \mapsto 1{,}4167 \mapsto 1{,}4138 \mapsto \ldots$$

Il s'avère que les décimales successives se stabilisent peu à peu et que cette trajectoire tend vers

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688724\ldots$$

un nombre dont la découverte de l'irrationalité a *causé* beaucoup d'émoi chez les Grecs. Cette trajectoire tend vers $\sqrt{2}$ et ne s'en écarte jamais, sauf bien sûr possible, en certaine que chacun des chiffres de $\sqrt{2}$ à partir de la 9 ne soient pas égaux à 1 ou 4 ou 2 ou 3 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 ou 9.

Confirmerait à la conjecture de Syracuse, on finit bien par atteindre 1, mais ici à la 9e étape, après avoir grimpé jusqu'à 4016. Voilà une trajectoire déjà bien cinée.

Temps de vol et de survol

Partons d'un entier $n \geq 2$.

Définition « (Temps de vol). Le temps de vol de n est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre 1 dans sa trajectoire sous f.

Par exemple, le temps de vol de $n = 9$ est 19. En effet, on l'a vu, il faut 19 étapes à partir de 9 pour atteindre 1. Et le temps de vol de $n = 27$ est 70. Mais ce n'est pas le cas de $n = 28$. Il faut plus attendre un entier n intéressant n à l'ordre la définition suivante.

Définition « (Temps de survol). Le temps de survol de n est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un entier n strictement inférieur à n dans sa trajectoire sous f.

Par exemple, le temps de survol de $n = 9$ est $\ldots$ En effet, la trajectoire de 9 commence par $9 \mapsto 3 \mapsto \ldots$ Donc, au bout de 1 itérations seulement, on atteint 3 qui est inférieur à 9. Notons que pour tout entier de départ $n \geq 3$, son temps de survol est inférieur à son temps de vol — à condition que la conjecture de Syracuse soit vraie, bien sûr.

Les concepts de temps de vol et de survol méritent tout naturellement à leurs formulations équivalentes de la conjecture de Syracuse.

Conjecture « (Sous-entendu). Pour tout entier $n \geq 2$, son temps de survol de n est fini.

Conjecture « (Sous-entendu). Pour tout entier $n \geq 2$, son temps de vol de n est fini.

Démonstration (conjecture ⇒ conjecture 1). Partons de $n \geq 2$. Il partie la conjecture 1, la trajectoire de n atteint un entier $n_1 < n$. Si $n_1 = 1$ on a fini. Si $n_1 \geq 2$, on applique le même raisonnement à n_1. On trouvera donc $n_2 < n_1$ dans la trajectoire de n_1 et donc de n. Une application répétée de cet argument prouve que la trajectoire de n finit par atteindre 1. □

Longues trajectoires

Comme le montre le cas de $n = 27$, certains entiers *n* peuvent avoir des temps de survol et de vol très longs, en fait arbitrairement *longs*. Typiquement, pour $n = 27$, le temps de survol vaut au moins 70. Il est difficile de vérifier que les 1 premières étapes de la trajectoire de $27 \to \ldots$ tenant n est bien suivantes :

$$(27 \to 1) \to (3 \cdot 27 + 1) \to (3 \cdot 27^2 + 1) \to (3^2 \cdot 27 + 1) \to \ldots \to (3^{70} + 1)$$

Or ces 6 premiers termes sont tous supérieurs à $27 - 1$, ce que 3 est supérieur à 2. D'où la conclusion annoncée. Par exemple, pour $n = 9$, voici les 9 premiers termes de la trajectoire de $n = 27 - 1 = 26$:

$$9 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 364$$

Ça ne fait que monter. Mais ça redescend juste après, l'étape suivante étant $182 \to 121$. De même, pour $n = 1000$, le temps de vol est $n = 1000 \to \ldots \to 1$ au moins soon. En fait, en poursuivant le calcul plus loin, on trouve que son temps de survol vaut précisément 1571. Quand $n = 2^{2000} - 1$, son temps de survol vaut précisément 10 677.

Du déterministe à l'aléatoire

En appliquant f une seule fois sur un entier, le résultat est parfaitement déterminé : c'est $n/2$ lors $3n + 1$ f suivant la parité de n. Itérons, en itérant T au petit nombre de fois, le comportement reste complètement déterministe. Mais en prolongeant, le mystère va jusqu'à ne pas pouvoir prédire le sens de cette comportement aléatoire étrange : la parité de chaque nouveau terme semble *aléatoire*, au sens de ne pas pouvoir prédire le comportement sur plus un temps avec probabilité tendant vers 1/2 sur le long terme.

C'est le cœur du problème. Si on pouvait le déterminer, ça résoudrait la conjecture de Syracuse. Car alors, qu'impliquerait le fait que dès que n atteint n, on applique dans les de suite T au nombre n, on tomberait en moyenne sur un nombre pairs de 3n+1, donc T pour n. Bref, cela impliquerait que T serait une application à tendance fondamental contractante. Et donc, qu'en partant d'entier $n \geq 2$, cette conclusion fonctionnerait vers 1 au bout d'un nombre suffisant d'étapes.

Accélération

Tenant compte de ce phénomène d'émergence de comportement pseudo-aléatoire à long terme, il nous est venu l'idée suivante : $\frac{1}{2}$ à partir d'un entier n pair, on applique f jusqu'à ce qu'on atteigne un entier n impair, puis on le multiplie par $3n + 1$ *ensuite*, ce qui ne dépend de la valeur de n. Par exemple, si n vaut 6 pour 3 chiffres, on applique f un coup T (ceci fois de suite à partir de n, ce qu'on notera par $T^{(n)}(n)$. Appelons f cette version *accélérée* de T. Itérons ainsi : n entier n vaut 6 pour 3 chiffres, on pose

$$f(n) = T^{(n)}(n).$$

C'est-à-dire T tant à partir de n. Décidons $n \to \ldots$ $f(n)$ cette transformation, puis bien distinguer de $n \to T(n)$. Par exemple, sous T on a $104 \to 52 \to 26 \to 13$, ce qui nous à donne $104 \to 13$. En effet, appliquer A à 104, qui a trois chiffres, revient à appliquer trois fois de suite T à partir de 104.

Exemple ($n = 27$) — En regardant la trajectoire sous T de 27 donnée plus haut, on obtient sans peine sa trajectoire sous f.

$$27 \to 82 \to 47 \to 142 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 364 \to 182 \to 91 \to 274 \to 137 \to 412 \to 206 \to 103 \to 310 \to 155 \to 466 \to 233 \to 700 \to 350 \to 175 \to 526 \to 263 \to 790 \to 395 \to 1186 \to 593 \to 1780 \to 890 \to 445 \to 1336 \to 668 \to 334 \to 167 \to 502 \to 251 \to 754 \to 377 \to 1132 \to 566 \to 283 \to 850 \to 425 \to 1276 \to 638 \to 319 \to 958 \to 479 \to 1438 \to 719 \to 2158 \to 1079 \to 3238 \to 1619 \to 4858 \to 2429 \to 7288 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 2734 \to 1367 \to 4102 \to 2051 \to 6154 \to 3077 \to 9232 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 1732 \to 866 \to 433 \to 1300 \to 650 \to 325 \to 976 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 184 \to 92 \to 46 \to 23 \to 70 \to 35 \to 106 \to 53 \to 160 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Ça ne fait que monter. Mais ça redescend juste après, l'étape suivante étant $182 \to 121$. De même, pour $n = 1000$, le temps de vol est $n = 1000 \to \ldots \to 1$ au moins soon. En fait, en poursuivant le calcul plus loin, on trouve que son temps de survol vaut précisément 1571. Quand $n = 2^{2000} - 1$, son temps de survol vaut précisément 10 677.

Un phénomène inattendu émerge

Tout naturellement, comme pour T, on peut définir des temps de vol et de survol pour f. Soit $n \geq 2$ un entier.

- Le temps de vol de n pour f est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre 1 dans sa trajectoire sous f.
- Le temps de survol de n pour f est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un entier n inférieur à n dans sa trajectoire sous A.

Pour facilitier la discussion, introduisons une notation spécifique pour les temps de vol et de survol respectifs de T et A :

- $\tau_T(n)$ et $\sigma_T(n)$: temps de vol et de survol de n pour T.
- $\tau_A(n)$ et $\sigma_A(n)$: temps de vol et de survol de n pour A.

Par exemple pour $n = 27$, on trouve

$$\tau_T(27) \geq 70 \quad \sigma_T(27) \geq 70$$
$$\tau_A(27) = 27 \quad \sigma_A(27) = 20$$

Comme A est une version accélérée de T, pour les temps de vol et de survol on a $\tau_T(n) \leq \tau_A(n)$ et $n \geq 2$. Mais ce n'est pas toujours vrai pour les temps de survol. Un contre-exemple est donné par $n = 9$. Sa trajectoire sous T est

$$9 \to 14 \to 7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to \ldots$$

Donc sa trajectoire accélérée sous A est

$$9 \to 14 \to 11 \to 26 \to 20 \to 5 \to \ldots$$

Ainsi $\sigma_T(9) = 2$ comme déjà observé, tandis que $\sigma_A(9) = 5$: il faut 4 étapes dans la trajectoire sous A pour tomber sur un nombre inférieur à 9.

Voici deux autres formulations équivalentes de la conjecture de Syracuse, cette fois-ci en termes de la fonction accélérée A.

Conjecture 1. Soit $n \geq 2$ un entier quelconque. Alors $\sigma_A(n)$ est fini.

Conjecture 2. Soit $n \geq 2$ un entier quelconque. Alors $\tau_A(n)$ est fini.

Une grosse surprise

En calculant le temps de survol pour A de très grands nombres entiers, notamment des $n = 2^k - 1$ avec k lui-même grand, on tombe sur un résultat complètement inattendu. Pour k lui-même $2^k - 1$ sont bien selon la conjecture de Syracuse, mais arbitrairement grands lorsque k augmente puisque $\sigma_T(2^k - 1) \geq k$. Mais $\sigma_A(2^k - 1)$ est fini. Et, de plus, il semble que $\sigma_A(2^k - 1)$ ne dépasse des temps de vol pour T, puisque $\sigma_A(2^k - 1) \leq \tau_T(n)$ pour tout $n \geq 2$.

La grosse surprise, c'est que lim $\sigma_A(2^k - 1)$, non contents d'être finis, semblent en plus tendre vers des bornes certainement assez petites. Et, en effet, aussi loin que l'on puisse les calculer, il semble que lim $\sigma_A(2^k - 1)$ n'excèdent jamais la valeur maximale de 19, et sans bien sûr. Il y a partie de $k = 6402$. D'où la conjecture suivante, inspirée par ces résultats expérimentaux.

Conjecture « (Du « $\sigma_A(2^k - 1) \leq 19$ pour tout $k \geq 2$ et $\sigma_A(2^k - 1) \leq 11$ pour tout $k \geq 6402$.

Résultats numériques

Voici trois tableaux en appui de ces surprenantes observations.

— D'abord pour $2 \leq k \leq 21$:

k	$n = 2^k - 1$	$\sigma_T(n)$	$\sigma_A(n)$
2	3	4	4
3	7	8	4
4	15	7	4
5	31	18	11
6	63	54	19
7	127	46	11
8	255	23	5
9	511	18	5
10	1023	18	5
11	2047	58	12
12	4095	50	11
13	8191	43	9
14	16383	43	7
15	32767	51	11
16	65535	48	9
17	131071	46	9
18	262143	89	14
19	524287	56	8
20	1048575	54	8
21	2097151	64	9

— Puis pour $4400 \leq k \leq 4410$:

k	$n = 2^k - 1$	$\sigma_T(n)$	$\sigma_A(n)$
4400	16982	11	
4401	16983	11	
4402	16959	11	
4403	16959	11	
4404	16956	11	
4405	16953	11	
4406	16950	11	
4407	16956	11	
4408	16956	11	
4409	16962	11	
4410	16954	11	

— Et pour 20985 $\leq k \leq$ 20995 :

k	$n = 2^k - 1$	$\sigma_T(n)$	$\sigma_A(n)$
20585	75708	10	
20586	75708	10	
20587	75708	10	
20588	75708	10	
20589	79614	10	
20590	79611	11	
20591	79608	11	
20592	79608	11	
20593	79608	11	
20594	79608	11	
20595	79605	11	

Il faut bien sûr s'intéresser à tous les entiers possibles n, pas seulement à ceux de la forme $n = 2^k - 1$. On trouve alors des n tels que $\sigma_A(n)$ dépasse la maximum observé ci-du-avant pour les $\sigma_A(2^k - 1)$, mais pas au delà de 50. En fait, la valeur maximale de $\sigma_A(n)$ trouvée à ce jour est 47 et cinq valeurs lassent presque que c'est le maximum absolu en presque.

Mais, ce n'est pas le comportement asymptotique, la conjecture annonce en effet σ_A. Elle est structurant plus forte que la conjecture de Syracuse car elle l'implique mais pas réciproquement.

Conjecture « (Version forte de la conjecture de Syracuse). Le temps de survol pour A de tout entier $n \geq 2$ est fini. Plus précisément, pour tout $n \geq 2$, $\sigma_A(n) \leq 50$.

Ce plafonnement mathématique pour A, on certainer manquant avec le comportement de la conjecture de Syracuse mesurée sur la conjecture de Syracuse.

Remarque — Les conjectures ci-‑ci présentées ici sont légitimement adaptées, mais elles ne sont pas nouvelles. Elles ont été publiées dans différentes versions dans [1] [2]. La différence est dans la définition de la fonction accélérée A, qui dépend du choix de l'écriture des nombres : décimale ici, binaire dans [1]. Cela dit, changer de base de numération ne change pas l'essence des conséquences conjectures, à savoir la nature fractal du temps de survol pour A.

Pour d'autres articles sur la conjecture de Syracuse dans plusieurs bases des maths, voir [3].

1. Disponible sur Eliahou sur son le portail scientifique HAL à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/EMPAL/

Références

[1] Shalom Eliahou. — Le problème 3x + 1 cycles de longueur 1 (3) — *Images des mathématiques* (16 mai 2011), URL : http://images.math.cnrs.fr/Le-problme-3x-1-cycles-de-longueur-1-3.html.

[2] Shalom Eliahou. — Le problème 3x + 1 : démarrer sans modestabile (5) — *Images des mathématiques* (13 juin 2011), URL : https://images.math.cnrs.fr/Le-problme-3x-1-demarrer-sans-modestabile-5.html.

[3] Shalom Eliahou. — Le problème 3x + 1 : y a-t-il des cycles non triviaux ? (10) — *Images des mathématiques* (20 juin 2011), URL : https://images.math.cnrs.fr/Le-problme-3x-1-y-a-t-il-des-cycles-non-triviaux-10.html.

[4] Shalom Eliahou, Jean Fromentin et Bénédicte Simonetto. *In the Spectrum Falling Time Bounded by 3x+1* Sous la dir. de Melvyn B. Nathanson. Springer International Publishing, 2016, p. 154-165. www.springer.com/gp/book/9783319-10_1007/978-3-319-31586-2.

Remerciements

L'auteur et le rédacteur d'Images des maths remercient vivement Laurent Bartholdi, Denis Blanquet, Jean Fromentin, Bruno Martin, Rénald Simonetto, et le relecteur de pseudonyme Moonwalk, pour leur relecture attentive et leurs précieux commentaires sur des versions préliminaires de cet article.

Article édité par Clément Gisclet.

Shalom Eliahou
Professeur - Université du Littoral Côte d'Opale
http://www.lmpa.univ-littoral.fr/~eliahou/

Crédits

Frontispice : Théâtre gnu de Syracuse. Fotoviolaoscilm from Italia (Michele Penazzi).